БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра программного обеспечения информационных технологий

Факультет ФНиДО

Специальность ПОИТ

Контрольная работа №1

по дисциплине «Дискретная математика»

Тема: «Основы теории конечных множеств и отношений»

Вариант 11

Выполнила: Карпеко Н. Г.

Договор № 941 от 20.02.2019 г.

Минск 2020

Вариант 11 (941 mod 30 =11).

**Задание 1.** Дан универсум U={x | x – целое, 0 ≤ x ≤ 9} и множества A, B, C, D из U, заданные описанием или перечислением своих элементов:

**{4, 7, 3, 2} {x∈U | x<4 и x>8 } {8, 2, 6, 3, 0} {x∈U | x – нечётное}.**

Выяснить, из каких элементов состоят множества B и D, а также множество M ⊆ U, заданное так:

**M⊆A, B∩C∩M≠∅, |M|=2, 6∉M, |M∩C|=2.**

**Решение.** Выясним, из каких элементов состоят множества B и D.

B = **{x∈U | x<4 и x>8 }**, значит, в множество D входят только те элементы множества U, удовлетворяющие неравенству **x<4 и x>8**. Поэтому B = {1, 2,3, 9}.

D = {x**∈**U | x - нечётное}, значит, в множество D входят только все те элементы множества U, которые являются нечётными числами. Поэтому D = {1, 3, 5, 7, 9}.

Элементы множества M определим в соответствии с заданными условиями: − **M⊆A**, значит, в М могут присутствовать только элементы 4, 7, 3, 2 из множества A.

**– B**∩**C**∩**M**≠∅, значит, в М есть элемент из В: {1, 2,3, 9} и С: **{8, 2, 6, 3, 0}: = 2.**

− |M|=2, значит, в М в точности 2 элемента.

**– 6∉M**, значит, в М нет элемента 6: {4, 7, 3, 2}.

**–|M∩C|=2: элементы М: {4, 7, 3, 2} ∩ С: {8, 2, 6, 3, 0} = {2, 3}**

Т.к. множество М состоит из двух элементов, окончательно M = {2, 3}.

**Задание 2.** Упростить выражение, заданное в Таблице 3, символьными преобразованиями (с помощью свойств операций над множествами) и проверить правильность полученного результата с помощью диаграмм Эйлера.

**D:\БГУИР\2 ДИСКРЕТН МАТЕМ\К Р 1\сканиров\Задан 2 Таб 3  К р 1.png**

**(A ∩ C ∪ B\A\C ∪ A ∪ A Δ C) ∩ (B ∩ (C ∪ A) ∪ C ∩ A)**

**Решение.** Упростим исходное выражение, используя свойства операций над множествами. Данное множество состоит из двух подмножеств, каждое из которых преобразуем по отдельности, а потом подставим полученные результаты и завершим преобразование.

Первая часть множества (F1): **(A ∩ C ∪ B\A\C ∪ A ∪ A Δ C ),**

вторая часть множества(F2): **(B ∩ (C ∪ A ) ∪ C ∩ A ).**

F1:

**1) A ∩ C ∪ B \ A \ C ∪ A ∪ A Δ C =** [F1 \ F2 = F1 ∩ F2]

**2) = A ∩ C ∪ B ∩ A ∩ C ∪ A ∪ A Δ C =** [F1 ∩ F2 = F2 ∩ F1]

**3) = (A ∩ A) ∩ (C ∪ C) ∪ (B ∪ A ∪ A Δ C) =** [F1∩ F1 = ∅], [F1∩ ∅ = F1]

**4) = (**∅ **∩** ∅) **∪ (B ∪ A ∪ A Δ C) = B ∪ A ∪ A Δ C** = [F1 Δ F2 =(F1\F2) ∪ (F2\F1)=

= (F1∩ F2) ∪ (F2 ∩ F1)]

**5) = B ∪ A ∪ (A ∩ C) ∪ (C ∩ A) =** [F1 ∩ F2 = F2 ∩ F1]

**6) =** **B ∪ A ∪ (C ∩ A) ∪ (A ∩ C) =**  [F1 ∩ F2 = F2 ∩ F1]

**7) = B ∪ A ∪ (A ∩ C) ∪ (A ∩ C) =** [F1∪ (F1∩ F2) = F1]

**8) = B ∪ A ∪ (A ∩ C) =**  [F1∪ (F2 ∩ F3) = (F1∪ F2) ∩ (F1∪ F3)]

**9) = B ∪ (A ∪ A) ∩ (A ∪ C) =** [F1 ∪ F1 = U]

**10) = B ∪ U ∩ (A ∪ C) =** [F1 ∪ U = U], [U ∩ F1 = F1]

**11) = A ∪ C**

F2:

12) = **B ∩ (C ∪ A) ∪ C ∩ A =** [F1 ∩ F2 = F2 ∩ F1]

13) = **B ∩ C ∩ (C ∪ A) ∪ A =** [F1∪ (F1∩ F2) = F1]

14) = **B ∩ C ∪ A**

F1 ∩ F2:

**15) (A ∪ C) ∩ (B ∩ C ∪ A) =** [F1 ∩ F2 = F1 ∩ F1]

16) = **(A ∪ C) ∩ ((A ∪ C) ∩ B) =** [F1 ∩ (F2 ∩ F3) = F1 ∩ F2 ∩ F3]

**17) = (A ∪ C) ∩ (A ∪ C) ∩ B =**  [F1 ∩ F1 = F1]

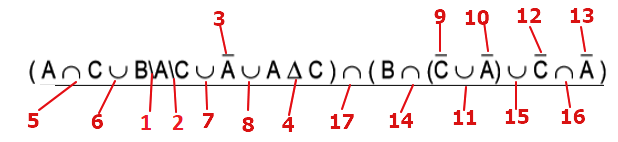
18) = **A ∪ C ∩ B.**

**Решение.** Упростим исходное выражение, используя свойства операций над множествами. Заметим, что исходное выражение на самом внешнем уровне состоит из двух независимых «сомножителей» (соединены знаком пересечения). Каждый из «сомножителей» состоит, в свою очередь, из независимых «слагаемых».

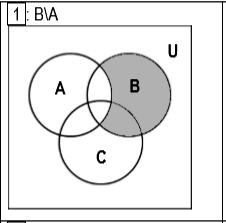
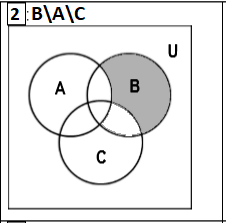
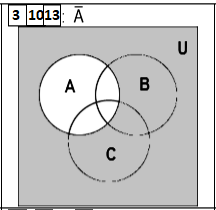
Будем упрощать исходное выражение

Ответ: **A ∪ C ∩ B.**

Порядок выполнения действий в исходном выражении с учётом приоритета операций и расставленных скобок:

****

Для некоторых первых действий построим диаграмму Эйлера, на которой закрасим область, соответствующую результату операции

** ** ****

Ис

И так далее.

**Задание 3.** Даны множества X = Y = {1,2,3,4,5} и соответствия Qi ⊆ X×Y, i=1, 2, 3, 4:

Q1 = {(2,5), (5,1), (3,4), (4,2), (1,3)},

Q2 = {(5,4), (1,3), (4,2), (2,3), (3,3)},

Q3 = {(1,2), (1,5), (3,4), (5,1), (2,3)},

Q4 = {(5,3), (2,3), (4,1), (3,1), (2,2)}

Определить, каким является каждое из соответствий Qi (i=1,…,4) ( 1) всюду определенное, 2)сюръективное, 3) функциональное, 4) инъективное, 5) биективное). Затем для каждого из соответствий Qi (i=1,…,4), с учетом его свойств, выполнить следующее:

3.1. Если соответствие Qi **всюду определено**, функционально, но не инъективно, то построить разбиение области определения соответствия на классы эквивалентности по отношению P: «2 элемента эквивалентны между собой тогда, когда они принадлежат прообразу 1го и того же элемента».

3.2. Если соответствие Qi **сюръективно**, инъективно, но не функционально, то построить разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению R: «2 элемента эквивалентны между собой тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».

3.3. Если соответствие Qi **не инъективно** и **не функционально**, то найти нижнюю и верхнюю грани множества Qi, введя на этом множестве отношение порядка, по которому сравниваются векторы одинаковой размерности (если а=(а1,а2) и b=(b1,b2), то a < b тогда, когда ai ≤ bi, i=1,2, и хотя бы одно из этих неравенств строгое).

3.4. Если соответствие Qi является **биекцией**, то построить соответствующую ему перестановку на множестве X и разложить ее на циклы.

**Решение.**

Q1: Q2:

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

Q3: Q4:

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5

Свойства соответствий:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Q1 | Q2 | Q3 | Q4 |
| всюду определено | Да | Да | Нет  {1, 2, 3, 5} **≠** X | Нет  {2, 3, 4, 5} **≠** X |
| сюръективно | Да | Нет  {2, 3, 4} **≠** Y | Да | Нет  {2, 3} **≠** Y |
| функционально | Да | Да | Нет  {2, 5} – образ 1 | Нет  {2, 3} – образ 2 |
| инъективно | Да | Нет  {1,2,3} – прообраз 3 | Да | Нет  {3, 4} – прообраз 1 |
| биективно | Да | Нет | Нет | Нет |

Выполним пункты 3.1 – 3.4 с учетом свойств соответствий.

Свойства соответствия Q1:

а) **всюду определено**, т.к. область определения Q4 совпадает с X:

**Пр1Q1 = {1, 2, 3, 4, 5} = X.**

б) **сюръективно**, поскольку область значений Q4 совпадает с Y:

**Пр2Q1= {1, 2, 3, 4, 5} = Y.**

в) **функционально**, поскольку образом любого элемента из области определения соответствия является единственный элемент из области значений соответствия.

г) **инъективно**, поскольку прообразом любого элемента из области значений соответствия является единственный элемент из области определения соответствия.

д) **биективно**, т.к. соответствие Q1 всюду определено, сюръективно и функционально.

Поскольку соответствие **Q1 =** {(2,5), (5,1), (3,4), (4,2), (1,3)} является биекцией, то выполним для него задание 3.4 – построим соответствующую ему перестановку на множестве X и разложим ее на циклы. Перестановка на множестве представляет собой двухстрочную матрицу.

В первой строке этой матрицы перечисляются элементы заданного множества (в нашем случае – множества X={1,2,3,4,5}). Эти элементы представляют собой первые компоненты пар, входящих в Q1:

{(2,5), (5,1), (3,4), (4,2), (1,3)},. Элементы первой строки перестановки должны быть упорядочены по возрастанию.

Вторая строка матрицы – собственно перестановка на множестве X. Этот порядок определяется вторыми компонентами пар из Q1: {(2,5), (5,1), (3,4), (4,2), (1,3)}.

Перестановка на множестве X и ее разложение на циклы:

= (1, 3, 4, 2, 5)

1 2 3 4 5

3 5 4 2 1

Свойства соответствия Q2:

а) **всюду определено**, т.к. область определения соответствия Q2 (проекция множества Q2 = {(5,4), (1,3), (4,2), (2,3), (3,3)} на первую ось) совпадает с X: **Пр1Q1 = {5, 1, 4, 2, 3} = X**.

б) **не сюръективно**, т.к. область значений соответствия Q1 (проекция множества Q2= {(5,4), (1,3), (4,2), (2,3), (3,3)} на вторую ось) не = множеству Y: **Пр2Q1={2, 3, 4}≠Y**.

в) **фунционально**, поскольку образ любого элемента из области определения соответствия содержит только 1 элемент из области значений соответствия (образ элементов 1, 2, и 3 – это множество {3} с единственным элементом, образом элемента 4 является множество {2}, образом элемента 5 является множество {4}).

г) **не инъективно**, т.к. для элемента **3** из области значений соответствия Q1 его прообраз {**1, 2, 3**} состоит более чем из одного элемента.

д) **не биективно**, поскольку соответствие Q2 не является, например, сюръективным.

Разбиение области значений Пр1Q2 = {1,2,3,4,5} на классы эквивалентности: Пр1Q2 = {1,2,3,4,5} = **{1,2,3,4,5} = {1,2,3} ∪ {4} ∪ {5}.**

1 –й класс: прообраз элемента 3 из области значений соответствия – {1, 2, 3}, 2 –й класс: прообраз элемента 3 из области значений соответствия – {4},

3 –й класс: прообраз элемента 4 из области значений соответствия – {5}.

Соответствие Q2. Поскольку соответствие Q2 не инъективно и не функционально, найдем нижнюю и верхнюю грани множества Q2. Нижняя грань множества Q2: {(1, 3), (2, 2)}. Верхняя грань множества Q2: {(2, 3), (4, 2)}.

Свойства соответствия Q3:

а) **не всюду определенно**, т.к. область определения соответствия не = множеству X: **Пр1Q3 = {1, 2, 3, 5} ≠ X.**

б) **сюръективно**, т.к. область значений Q3 совпадает с Y:

**Пр2Q3 = {1, 2, 3, 4, 5} = Y.**

в) **не функционально**, поскольку образ элемента 1 из области определения соответствия Q3 состоит более чем из 1 элемента: **{2, 5} ⊆ Пр2Q3**.

г) **инъективно**, поскольку прообраз каждого элемента из области значений соответствия Q3 состоит в точности из 1 элемента.

д) **не биективно**, т.к. соответствие не всюду определено и не функционально.

Т.к. соответствие Q3 сюръективно и инъективно, но не функционально, то выполним для него задание 3.2, то есть построим разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению R: «два элемента эквивалентны между собой тогда, когда они принадлежат образу одного элемента».

Разбиение области значений Пр2Q3 = {1,2,3,4,5} на классы эквивалентности:

Пр2Q3 = {1,2,3,4,5} = {2, 5} **∪** {3} **∪** {4} **∪** {1}.

1 –й класс: образ элемента 1 из области определения соответствия – {2, 5},

2 –й класс: образ элемента 2 из области определения соответствия – {3},

3 –й класс: образы элемента 3 из области определения соответствия – {4},

4 –й класс: образ элемента 5 из области определения соответствия – {1}.

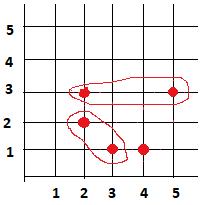
Свойства соответствия Q4:

а) **не является** **всюду определенным**, поскольку область определения соответствия **Q4** не = множеству X: Пр1Q4 = {2, 3, 4, 5} ≠ X.

б) **не сюръективно**, т.к. область значений Q4 не совпадает с Y:

Пр2Q4 ={2, 3}≠Y.

в) **не функционально**, поскольку образ элемента 2 из области определения соответствия состоит более чем из 1 элемента: {2, 3} ⊆ Пр2Q4.

г) **не инъективно**, поскольку, например, для элемента 1 из области значений соответствия прообраз состоит более чем из 1 элемента: {3, 4}.

д) **не биективно**, т.к. соответствие Q4, например, не всюду определено.

Поскольку соответствие Q2 не инъективно и не функционально, найдем нижнюю и верхнюю грани множества Q2.

Нижняя грань множества Q2: **{(2, 2), (3, 1)}.**

Верхняя грань множества Q2: **{(2, 3), (5, 3)}.**